

Equação de Bernoulli

Vamos considerar um fluido com densidade ρ constante, em escoamento estacionário em uma tubulação sem derivações (Fig.18).

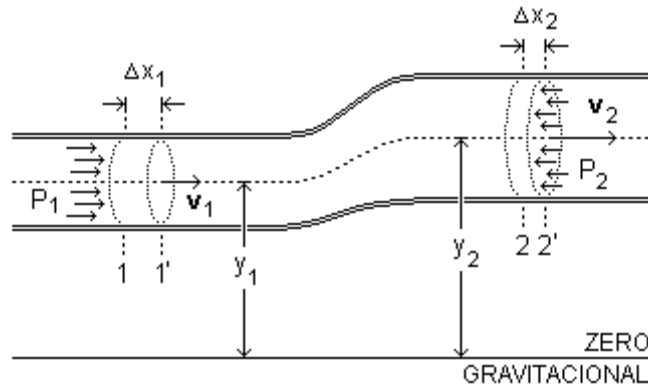


Fig.18

Sejam duas porções de fluido, ambas com volume V e massa ρV , uma na posição 1 e outra na posição 2. Num referencial fixo na tubulação, as energias dessas duas porções de fluido são dadas por:

$$E_1 = \rho V \left(\frac{1}{2} v_1^2 + gy_1 \right)$$

e

$$E_2 = \rho V \left(\frac{1}{2} v_2^2 + gy_2 \right)$$

Podemos pensar na diferença $E_2 - E_1$ como a variação da energia de uma porção de fluido que se encontra antes entre as seções 1 e 2 e depois entre as seções 1' e 2' da tubulação. Então, lembrando que essa variação de energia deve ser associada ao trabalho realizado pelo resto do fluido, podemos escrever:

$$E_2 - E_1 = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2$$

ou seja:

$$\rho V \left(\frac{1}{2} v_2^2 + gy_2 \right) - \rho V \left(\frac{1}{2} v_1^2 + gy_1 \right) = (P_1 - P_2) V$$

Esta expressão pode ser rearranjada, resultando:

$$P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Esta é a equação de Bernoulli. Outra forma de apresentá-la é a seguinte:

$$P + \rho gy + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Exemplo 1

Vamos discutir o escoamento de um líquido por um orifício na parede do recipiente que o contém, mostrando que o líquido, saindo por dois orifícios localizados simetricamente, um a uma altura $\frac{1}{2}H + z$ e outro a uma altura $\frac{1}{2}H - z$, tem o mesmo alcance.

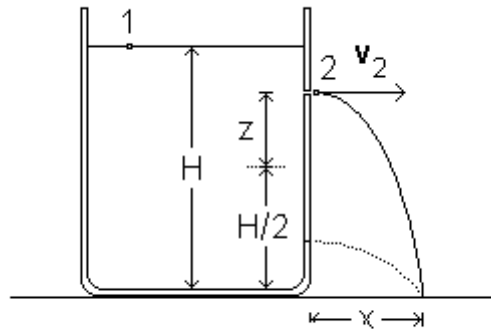


Fig.19

Tomando elementos de volume no entorno dos pontos 1 e 2, num referencial fixo no solo, com o nível de referência para a energia potencial gravitacional (zero gravitacional) passando pelo fundo do recipiente, a equação de Bernoulli fornece:

$$P_1 + \rho gH + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g(\frac{1}{2}H + z) + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Vamos considerar o volume de líquido dentro do recipiente como sendo muito grande. Assim, o módulo da velocidade com que a superfície livre do líquido se move para baixo é muito menor do que o módulo da velocidade com que o líquido escoar pelo orifício na parede do recipiente. Matematicamente, $v_1 \ll v_2$. Podemos, então, desprezar v_1 .

Além disso:

$$P_1 = P_2 = P_A$$

Desse modo, a expressão acima fica:

$$gH = g(\frac{1}{2}H + z) + \frac{1}{2}v_2^2$$

e daí temos:

$$v_2 = \sqrt{g(H - 2z)}$$

O movimento do líquido ao longo da vertical é um MRUV. Então, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}H + z = \frac{1}{2}gt^2$$

em que t representa o intervalo de tempo que o líquido leva para alcançar o solo. Esse intervalo de tempo fica dado, então, por:

$$t = \sqrt{\frac{H+2z}{g}}$$

Por outro lado, o movimento do líquido ao longo da horizontal é um MRU. Desse modo, o alcance do líquido que sai pelo orifício fica:

$$x = v_2 t$$

e usando os resultados anteriores:

$$x = \sqrt{(H-2z)(H+2z)}$$

Aqui devemos observar o que se segue. Localizamos o orifício de saída do líquido a uma altura $\frac{1}{2}H + z$, medida a partir da base do recipiente, e obtivemos o alcance dado acima. Se tivéssemos localizado o orifício a uma altura $\frac{1}{2}H - z$, também medida a partir da base do recipiente, os cálculos seriam os mesmos, exceto pela substituição de z por $-z$.

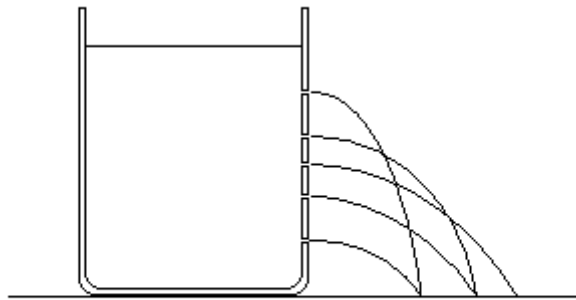


Fig.20

Mas ocorre que, se fizermos tal substituição, a expressão acima, para o alcance do líquido que sai pelo orifício, não se altera. Isto significa que o líquido, saindo por dois orifícios, um a uma altura $\frac{1}{2}H + z$ e outro a uma altura $\frac{1}{2}H - z$, tem o mesmo alcance (Fig.20).

Exemplo 2

Vamos discutir um aspecto do chute que, no futebol, é conhecido como folha seca. Neste chute, em um referencial fixo no campo de futebol, a trajetória do centro de massa da bola é tridimensional e o movimento da bola pode ser decomposto em quatro: dois movimentos de translação do centro de massa da bola na horizontal, um movimento de translação do centro de massa da bola na vertical e um movimento de rotação da bola como um todo ao redor do seu centro de massa.

Para o que nos interessa, vamos considerar apenas um dos movimentos de translação do centro de massa da bola na horizontal e o movimento de rotação da bola como um todo ao redor de um eixo vertical que passa pelo seu centro de massa.

Então, num referencial fixo no campo de futebol, a atmosfera está em repouso, o centro de massa da bola se desloca com velocidade horizontal de módulo v e os pontos da superfície da bola, no seu movimento de rotação ao redor do eixo vertical que passa pelo centro de massa da bola, se deslocam com velocidade linear de módulo v_R (Fig.21(a)).

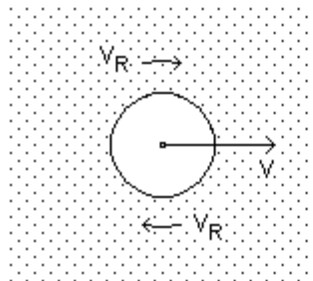
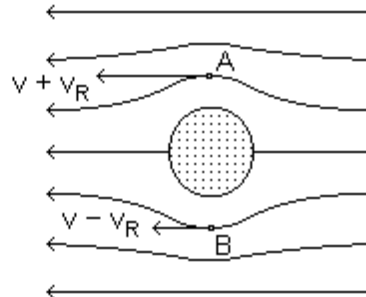


Fig.21(a)



(b)

Num referencial fixo no centro de massa da bola (Fig.21(b)), os módulos das velocidades com que os elementos de volume de ar passam pelos pontos A e B, localizados à mesma altura, são dados, respectivamente, por:

$$v_A = v + v_R$$

e

$$v_B = v - v_R$$

Para elementos de volume no entorno desses pontos, a equação de Bernoulli fornece:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

ou

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

Como $v_A > v_B$, esta última expressão mostra que $P_B > P_A$. Assim, existe uma força resultante horizontal atuando na bola, perpendicular à direção da velocidade de translação do seu centro de massa, cujo sentido vai de B para A. Por isso, em vez de se mover num plano vertical, como um projétil, a bola se move numa trajetória que se desvia lateralmente desse plano.

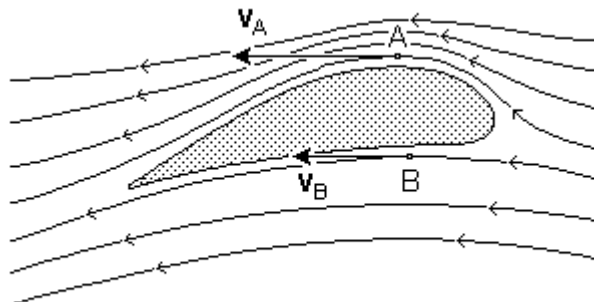


Fig.22

Exemplo 3

Para discutir o mecanismo de sustentação de um avião no ar, vamos considerar a atmosfera em repouso num referencial fixo no solo. As asas, assim como outras partes do avião, arrastam sempre com elas certa quantidade de ar. Contudo, para o nosso argumento, vamos supor que esse não é o caso. Desse modo, quando uma asa passa por uma região qualquer da atmosfera, os elementos de volume de ar que estão no seu caminho se afastam de suas posições, deixando-a passar, e depois voltam às suas posições originais, quando ela já tiver passado.

Em um referencial fixo no avião, os elementos de volume de ar percorrem linhas de corrente que se separam, umas passando por cima e outras passando por baixo da asa (Fig.22). Devido à forma do perfil da asa, os elementos de volume de ar que passam por cima dela têm que percorrer uma distância maior do que os elementos de volume de ar que passam por baixo. Assim, se os elementos de volume de ar que passam pelos pontos genéricos A e B têm velocidades com módulos v_A e v_B , respectivamente, devemos ter $v_A > v_B$ e um raciocínio idêntico àquele usado na discussão do chute folha seca leva à conclusão que $P_B > P_A$. Isto significa que existe uma força resultante atuando na asa do avião, de baixo para cima, que lhe dá sustentação.

Exemplo 4

Um vaporizador de perfume é composto de um recipiente para o perfume líquido, dois tubos conectados em forma de T e uma bexiga de borracha (Fig.23).

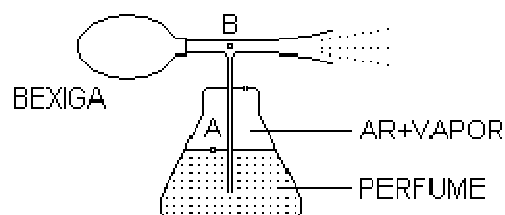


Fig.23

Quando pressionamos a bexiga, o ar no seu interior é projetado para fora, passando pela região ao redor do ponto B com uma velocidade v_B num referencial fixo no vaporizador. Enquanto isso, a mistura de ar com vapor de perfume, em um ponto A qualquer da superfície livre do perfume líquido, permanece em repouso: $v_A = 0$.

Portanto, ignorando a diferença de altura entre os pontos A e B, a equação de Bernoulli permite escrever:

$$P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

ou:

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

em que ρ é a densidade do ar. Da última expressão podemos concluir que $P_A > P_B$. Devido a essa diferença de pressão, o perfume líquido sobe pelo tubo e encontra a corrente de ar que vem da bexiga, pulverizando-se em minúsculas gotas que são levadas para fora do pulverizador.

Tubo de Venturi

O tubo de Venturi permite determinar o módulo da velocidade de escoamento de um líquido no interior de uma tubulação. Este dispositivo é constituído por um tubo em U com mercúrio (tubo manométrico), com um dos ramos ligado a um segmento normal da tubulação e o outro ramo ligado a um segmento com um estrangulamento (Fig.24).

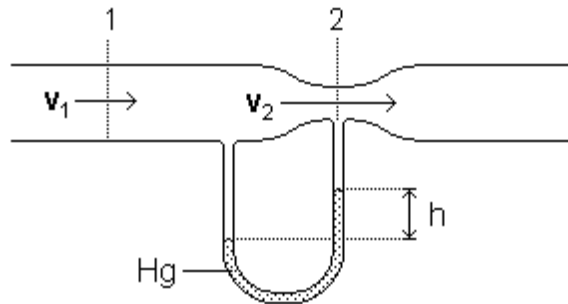


Fig.24

Vamos considerar que o líquido, de densidade ρ constante, escoa pela tubulação em regime estacionário. Em qualquer segmento normal da tubulação, cuja seção reta tem área A_1 , o líquido se move com velocidade v_1 e no segmento com estrangulamento, cuja seção reta tem área A_2 , o líquido se move com velocidade v_2 num referencial fixo na tubulação. No segmento com estrangulamento, o módulo da velocidade do líquido aumenta e a pressão diminui. Por isso, as alturas das colunas de mercúrio nos ramos do tubo em U são diferentes.

Considerando a tubulação na horizontal, a equação de Bernoulli permite escrever:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

ou:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

em que P_1 e P_2 são as pressões do líquido, respectivamente, no segmento normal e no segmento com estrangulamento.

Por outro lado, a equação da continuidade fornece:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

ou:

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) v_1$$

Substituindo v_2 , dado por esta expressão, naquela que dá ΔP , que obtivemos da equação de Bernoulli, resulta:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

e desta, finalmente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}$$

Desta maneira, conhecendo a densidade ρ e as áreas A_1 e A_2 e medindo a diferença de pressão ΔP com o tubo manométrico, podemos determinar o módulo da velocidade de escoamento do líquido na tubulação.

Tubo Pitot

O tubo Pitot é formado por dois condutos, um dentro do outro, ligados pelos ramos de um tubo em U com mercúrio (Fig.25). Esse dispositivo permite determinar, num referencial em que ele está em repouso, o módulo da velocidade de escoamento de um gás. Alternativamente, permite determinar o módulo da velocidade de um objeto que se move através de um gás num referencial em que o gás está em repouso.

O tubo Pitot é largamente empregado para determinar os módulos das velocidades dos aviões e os módulos das velocidades de escoamento dos gases no interior de tubulações.

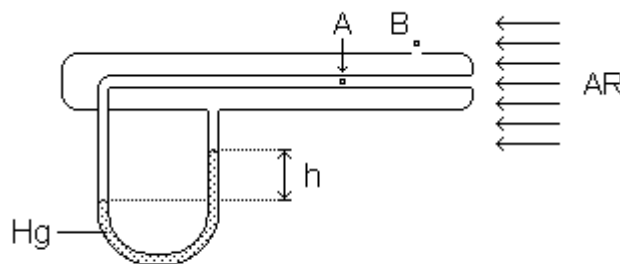


Fig.25

Vamos considerar o caso em que o tubo Pitot está em repouso no referencial considerado e o ar, com densidade ρ_{AR} , em movimento com velocidade de módulo v (Fig.25). O ar no interior do conduto em que se encontra o ponto A está parado (estagnado) e na região em torno do ponto B, mantém a velocidade de módulo v . Como a diferença de altura entre os pontos A e B é desprezível, a equação de Bernoulli fica:

$$P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho_{AR} v^2$$

Por outro lado:

$$P_A - P_B = \rho_M gh$$

em que ρ_M representa a densidade do mercúrio.

Essas duas expressões fornecem, para o módulo da velocidade de escoamento do ar:

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{\rho_M}{\rho_{AR}} \right) gh}$$

Assim, medindo h , a diferença nas alturas das colunas de mercúrio nos ramos do tubo em U, podemos determinar o módulo da velocidade de escoamento do ar.

A expressão acima mostra que o procedimento de medida da velocidade de escoamento de um gás com o tubo Pitot é independente da pressão atmosférica.

Exercício 1

Segure uma folha de papel por uma de suas bordas, colocando-a na altura da boca (Fig.26(a)).



Fig.26(a)



(b)

Sopre fortemente por sobre a folha, na horizontal (Fig.26(b)). Descreva e explique o ocorrido.

Exercício 2

Suspenda duas bolinhas de tênis de mesa, separadas por cerca de 3 cm, com fios de mesmo comprimento e sopre entre elas. Observe e tente explicar o ocorrido.

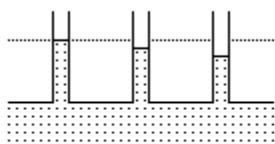


Fig.27(a)



(b)

Exercício 3

A queda de pressão no escoamento de água em um tubo de diâmetro constante (Fig.27(a)) e em um tubo cujo diâmetro diminui (Fig.27(b)) pode ser facilmente observada.

Conecte uma das extremidades de uma mangueira no tubo de diâmetro constante e a outra extremidade na torneira.

Abra a torneira de modo que o fluxo de água vá aumentando lentamente.

Observe o desnível nos ramos do tubo e explique-o.

Repita o procedimento com o tubo cujo diâmetro diminui.

Compare o que se observa nas duas situações.

Exercício 4

Mostre que a Hidrostática é um caso particular da Hidrodinâmica, isto é, mostre que a equação:

$$P(h) = P_A + \rho gh$$

é um caso particular da equação de Bernoulli. Na expressão acima, $P(h)$ é a pressão a uma profundidade h num fluido em equilíbrio, de densidade ρ constante, P_A é a pressão atmosférica e g é o módulo da aceleração gravitacional.